page 402. 1992 . 1/7
I.N.A. Options : Mathématiques

MATIÈRES À OPTION

(Option générale)

MATHÉMATIQUES, BIOLOGIE, SCIENCES PHYSIQUES, INFORMATIQUE

DURÉE : 3 heures

MATHÉMATIQUES

Introduction .

S désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles.

La suite de terme général u_n ($n \in \mathbb{N}$), sera notée indifféremment u ou (u_n).
K est le sous-espace vectoriel des suites constantes et, parmi elles, c est la suite constante dont le terme général est 1.
T est l'application linéaire de S dans S qui, à la suite u de terme général u_n, associe la suite T(u)= v de terme général

$$v_n = u_{n+1} - u_n .$$

1 - Exemples.

Si u est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$, déterminer T(u).
Même question pour u définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$;
puis pour u définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$.
On calculera dans ces trois cas v_n en fonction de n.

Enfin, E est le sous-ensemble de S constitué des suites u telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 4u_{n+3} = 9u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n .$$

Tournez la page S.V.P.

Premières propriétés.

2. Etude de l'endomorphisme T.

2.1 Déterminer le noyau de T, noté Ker T.

2.2 On se donne une suite v. Montrer que si on choisit $u_0 = \alpha$, il existe une suite unique u de premier terme $u_0 = \alpha$ telle que T(u)=v. Donner, pour $n \geq 1$, l'expression de u_n en fonction de α et de termes de la suite v. En déduire que T est surjective.

2.3 Exemple : si v est la suite de terme général $v_n = 3n - 1$, déterminer les suites u telles que T(u) = v. On exprimera u_n en fonction de n et de α.

2.4 Montrer que tout réel est valeur propre de T et préciser le sous-espace propre associé ainsi que sa dimension.

2.5 Déterminer la suite qui sera notée a , telle que

$$T(a) = c \quad \text{et} \quad a_0 = 0.$$

2.6 Montrer que E est un sous-espace vectoriel de S et que T(E) est inclus dans E. Vérifier que E contient les suites c et a.

2.7 Dimension de E .

On considère l'application linéaire notée L de E dans $\mathbb{R}^3$ qui, à toute suite u , associe le triplet (u_0, u_1, u_2).

Montrer que L est bijective et en déduire la dimension de E.

3. Construction des suites appartenant à E.

Soit u un élément de E. On pose v = T(u) et w = T(v).

3.1 Calculer w_n en fonction de termes de la suite (u_n).

Montrer que w est une suite géométrique. Exprimer w_n en fonction de w_0 et n.

3.2 En utilisant la méthode de la question 2.2, exprimer le terme général v_n de la suite v en fonction de v_0, w_0 et n.

3.3 Exprimer de même, pour $n \geq 3$, le terme général u_n de la suite u en fonction de u_0, v_0, w_0 et n puis en fonction de u_0, u_1, u_2 et n.

3.4 Exemple: calculer u_n en fonction de n lorsque

$$u_0 = \frac{1}{4}, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = \frac{19}{16}.$$

4. I désigne la matrice identité 3×3 et A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

4.1 Calculer $(A-I)^2(4A-I)$.

4.2 En déduire que, pour tout n, A^n est combinaison linéaire de I, A et A^2.

4.3 Pour trouver les coefficients de cette combinaison linéaire, on procède ainsi : n étant un entier ≥ 3, déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $(X-1)^2(4X-1)$.

On écrira ce reste sous la forme $\alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$ et on cherchera 3 relations reliant α_n, β_n et γ_n.

On donnera la valeur de ces 3 coefficients en fonction de n.

4.4 Vérifier que pour tout $n \geq 3$

$$A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I$$

4.5 On pose pour tout entier naturel n: $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

Montrer que $(u_n) \in E \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = A X_n$.

Retrouver ainsi, le résultat obtenu à la question 3.4.

Tournez la page S.V.P.